Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x(x+1)}-\dfrac{\log(x+1)}{x^2} & , x\in(-1,0)\cup(0,\infty) \\ k & , x=0 \end{cases}$$

Να υπολογίσετε το $k\in\mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση f να είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\left[-\frac{1}{2},2\right]$

ΛΥΣΗ

f ομοιόμορφα συνεχής $\left[-\frac{1}{2},2\right] \Rightarrow f$ συνεχής $\left[-\frac{1}{2},2\right] \Rightarrow f$ συνεχής $x_0=0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=k$ (1)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x(x+1)}-\frac{\log(x+1)}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x-\log(x+1)\cdot(x+1)}{x^2\cdot(x+1)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-(x+1)\cdot\log(x+1)+x}{x^2+x^3}\ \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{\text{L'Hôsp.}}{=}}\ \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}-\log(x+1)-\cancel{1}}{2x+3x^2}\ \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{\text{L'Hôsp.}}{=}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{1+x}}{2+6x}=-\frac{1}{2}\Rightarrow \boxed{k=-\frac{1}{2}}$$

Παρατήρηση:

Για να παραγωγίσουμε δεύτερη φορά με τον Κανόνα L'Hôspital θα πρέπει $2x+3x^2\neq 0 \Rightarrow x\neq 0$ και $x\neq -\frac{2}{3}$